数 学（８０分）

Ⅰ　試験全体に関する注意

１．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

２．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

１．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

２．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

１．解答は，解答用紙に鉛筆（HB）で記入してください。

２．問題文中の解答番号 [1] 以降には，0，1，2，3，……，9 の数字のうち，いずれか 1 つが入ります（１桁の整数“1”は [1]，２桁の整数“12”は [1][2]，３桁の整数“123”は [1][2][3] のように並べて表す）。

解答に関する記入上の注意

⑴　根号（$\sqrt{\ }$）を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください（$4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけない）。

⑵　分数を答えるときは，既約分数（reduced fraction）にして答えてください。

３．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

受験番号	
名　　前	

数 学（８０分）

第１問　次の文章中の［1］～［30］に適する数字を，下の選択肢①～⑩のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，重複して使用してもよい。　［1］～［30］

(A)

$0° < \theta < 180°$ とする。

(1) $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ である。

(2) $\sin\theta = \cos 50°$ のとき，$\theta = \boxed{3}\boxed{4}°$，$\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}°$ である。

(3) AB = AC である二等辺三角形 ABC があり，BC = 2，∠BAC = 36° である。

∠ABC の二等分線と辺 AC の交点を D とする。

(i)　∠ABD = ∠CBD = $\boxed{8}\boxed{9}°$ である。

(ii)　AD = ［10］ である。

(iii) 三角形 ABC と三角形 BCD は相似であることより，AB = $\boxed{11} + \sqrt{\boxed{12}}$ である。

(iv) $\sin 54° = \frac{\boxed{13} + \sqrt{\boxed{14}}}{\boxed{15}}$ である。

(B)

サイコロを3回投げ，出た目の数を順に p，q，r とし，放物線 $C : y = px^2 + qx + r$ について考える。

(1) C の y 切片が5である確率は $\dfrac{\boxed{16}}{\boxed{17}}$ である。

(2) C が点 $(1,\ 5)$ を通る確率は $\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}\boxed{20}}$ である。

(3) C が x 軸と接する確率は $\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}\boxed{23}\boxed{24}}$ である。

(4) C の頂点の x 座標が整数である確率は $\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}\boxed{27}}$ である。

(5) C の頂点の x 座標が整数である条件のもと，C の頂点の y 座標が0である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}\boxed{30}}$ である。

〔 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{30}$ の選択肢 〕

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9	⑩ 0

第２問　次の文章中の 31 ～ 58 に適する数字を，下の選択肢①～⑩のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，重複して使用してもよい。　31 ～ 58

(A)

$f(x) = 8 \cdot 4^x + 2 \cdot 4^{-x} + 2^{x+1} + 2^{-x}$ とし，$t = 2^{x+1} + 2^{-x}$ とする。

(1) $2^x = u$ とする。$t = \boxed{31}u + \dfrac{\boxed{32}}{u}$ であり，t は，最小値 $\boxed{33}\sqrt{\boxed{34}}$ をとる。このとき，

$x = -\dfrac{\boxed{35}}{\boxed{36}}$ である。また，$t = 4$ のとき，$u = \boxed{37} \pm \dfrac{\sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}}$ である。

(2) $f(x) = \boxed{40}t^2 + t - \boxed{41}$ である。

(3) $f(x) = a$ を満たす異なる実数 x の個数が 1 個であるとき，$a = \boxed{42} + \boxed{43}\sqrt{\boxed{44}}$

である。

(B)

平面上に一辺の長さが 9 である正三角形 ABC と点 P がある。

$$2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} + 4\overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

を満たしている。三角形 ABC の重心を G とする。直線 AP と辺 BC の交点を D とし，直線 AG と CP の交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\boxed{45}}{\boxed{46}}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\boxed{47}}{\boxed{48}}\overrightarrow{AC}$ である。

(2) AP : PD = $\boxed{49}$: $\boxed{50}$，BD : DC = $\boxed{51}$: $\boxed{52}$ である。

(3) GP = $\boxed{53}$ である。

(4) QP : PC = $\boxed{54}$: $\boxed{55}$ である。

(5) 三角形 ABC の面積は，三角形 GPQ の面積の $\boxed{56}\boxed{57}\boxed{58}$ 倍である。

〔 $\boxed{31}$～$\boxed{58}$の選択肢 〕

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9	⑩ 0

第３問　次の文章中の 59 ～ 73 に適する数字を，下の選択肢①～⑩のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，重複して使用してもよい。　59 ～ 73

(1) $f(x) = x^9 e^{-x}$ とし，$f(x)$ の最大値を M とする。

$$f'(x) = \left(\boxed{59} x^{\boxed{60}} - x^{\boxed{61}} \right) e^{-x}$$

である。$f(x)$ の極値の個数は 62 個である。また，$f(x)$ は $x = \boxed{63}$ において最大値 M をとる。したがって，$x > 0$ において，

$$0 < \frac{f(x)}{x} \leqq \frac{M}{x}$$

が成立する。したがって，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x \to \infty} x^8 e^{-x} = \boxed{64}$$

である。

(2) R を正の定数として，

$$I_1 = \int_0^R e^{-x}\, dx, \qquad I_s = \int_0^R x^{s-1} e^{-x}\, dx \quad (s > 1)$$

とする。また，

$$G_s = \lim_{R \to \infty} I_s$$

とする。

(i)

$$I_1 = \boxed{65} - e^{-R}, \quad G_1 = \boxed{66}$$

である。また，$s \geqq 2$ に対し，

$$I_s = -R^{s-\boxed{67}} e^{-R} + \left(s - \boxed{68} \right) I_{s-1}$$

である。

(ii) $G_4 = \boxed{69}$，$G_8 = \boxed{70}\boxed{71}\boxed{72}\boxed{73}$ である。

〔 59 ～ 73 の選択肢 〕

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9	⑩ 0

第４問　次の文章中の 74 ～ 83 に適する数字を，下の選択肢①～⑩のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，重複して使用してもよい。　74 ～ 83

放物線 $C : y^2 = 12x$ の準線を l，焦点を F とする。

(1) l の方程式は $x = -$ 74 であり，F の座標は $\left($ 75 ，76 $\right)$ である。

(2) a を正の定数とする。C 上の点 $\mathrm{P}(\ a,\ 2\sqrt{3a}\ )$ における接線を m とする。

m の方程式は

$$\sqrt{a}\,y = \sqrt{\boxed{77}}\ (x + a)$$

である。m と x 軸の交点を Q とすれば，$\mathrm{FP} = a +$ 78 ，$\mathrm{FQ} = a +$ 79 である。

また，m と l の交点を R とすれば，$\angle\mathrm{RFP} =$ 80 81 °である。

(3) F を通り y 軸に平行な直線を m_1 とし，m_1 と C の交点を T_1，T_2 とする。

m_1 および，T_1，T_2 における C の 2 本の接線によって囲まれてできる三角形の面積は 82 83 である。

〔 74 ～ 83 の選択肢 〕

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9	⑩ 0

数学の問題はこれで終わりです。解答欄の 84 ～ 100 はマークしないでください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。