数学Ⅱ・数学Ｂ・数学Ｃ

問題は第４問まであります

＜答えに関する注意事項＞

１．以下の問題の解答番号 1 以降には，0，1，2，3，‥‥‥，9 の数字のうち，いずれか１つが入る（１桁の整数“1”は 1 ，２桁の整数“12”は 1 2 ，３桁の整数“123”は 1 2 3 のように並べて表す）。

２．分数は既約分数（それ以上約分できない分数）で答えるものとする。

３．根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えるものとする（例えば，$4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけない）。

第１問　次の文章中の［1］～［25］に適する数字を，下の選択肢①～⑩のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，重複して使用してもよい。　**解答番号**［1］～［25］

(A)

x の方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の 2 つの解を α，β とする。ただし，a，b は実数の定数である。

(1) $\alpha + \beta = 7$，$\alpha\beta = 5$ のとき，$a =$［1］，$b =$［2］である。

(2) $\alpha^3 + \beta^3 = 28$，$\alpha^3\beta^3 = 27$ であり，a が整数のとき，$a =$［3］，$b =$［4］である。

(3) $\alpha + \frac{1}{\beta} = -2$，$\beta + \frac{1}{\alpha} = 1$ のとき，$b = -$［5］$\pm\sqrt{}$［6］である。

(B)

x の 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ が，$x = 1 + 2i$ を解にもつとする。ただし，a，b は定数であり，i は虚数単位である。

(1) $x = 1 + 2i$ を解にもつことより，$-$［7］$a + b -$［8］$+$（［9］$a +$［10］$b -$［11］$)i = 0$ である。

(2) $a = 1$ のとき，$b =$［12］$-$［13］i である。

(3) a，b が実数のとき，$a = -$［14］，$b =$［15］である。

(C)

放物線 $C : y = x^2 + 3x + 4$ と直線 $l : y = ax$ がある。ただし，a は実数の定数である。C と l は異なる 2 点 P，Q で交わる。$\mathrm{A}(6,\ 0)$ とし，三角形 APQ の重心を G とする。

(1) a のとる値の範囲は，$a < -\boxed{16}$，$\boxed{17} < a$ である。

(2) $a = 9$ のとき，G の座標は $\left(\boxed{18},\ \boxed{19}\boxed{20}\right)$ である。

(3) a が，$a < -\boxed{16}$ の範囲を動くとき，G の軌跡は，放物線 $y = \boxed{21}x^2 - \boxed{22}x + \boxed{23}$ の $x < \dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}$ の部分である。

〔 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{25}$ の選択肢 〕

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9	⑩ 0

第２問　次の文章中の［1］～［18］に適する数字を，下の選択肢①～⑩のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，重複して使用してもよい。　　**解答番号**［1］～［18］

$f(x)=-x^3+3x^2+ax$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする。$\mathrm{A}(2,\ 0)$ とする。ただし，a は実数の定数とする。

(1)　C が A を通るとき，$a=-$［1］である。このとき，A における接線の方程式は，

$y=-$［2］$x+$［3］である。

(2)　C 上の点 $\left(p,\ f(p)\right)$ における接線の方程式は，

$$y=-\left(\boxed{4}p^2-\boxed{5}p-a\right)x+\boxed{6}p^3-\boxed{7}p^2 \text{ である。}$$

この接線が A を通るとき，

$$a=-p^3+\frac{\boxed{8}}{\boxed{9}}p^2-\boxed{10}p \text{ である。}$$

(3)　$h(p)=-p^3+\dfrac{\boxed{8}}{\boxed{9}}p^2-\boxed{10}p$ とする。p の関数 $h(p)$ は，$p=$［11］で極小，$p=$［12］で極大となる。

(4)　A を通る C の接線の本数が 2 本であるような a の値は，$a=-\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{14}}$，$-$［15］である。

$f(x)$ が $x=x_1$ で極大，$x=x_2$ で極小となるとする。$a=-$［15］のとき，

$|x_2-x_1|=\dfrac{\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}}{\boxed{18}}$ である。

〔 1 ～ 18 の選択肢 〕

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9	⑩ 0

第３問　次の文章中の［1］～［22］に適する数字を，下の選択肢①～⑩のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，重複して使用してもよい。　　**解答番号**［1］～［22］

n を正の整数とし，不等式 $x+2y \leqq n$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_n とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) a_1 を求めるには，$x+2y \leqq 1$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を求めればよい。このうち，$y=0$ となるものは，［1］個あり，$y \geqq 1$ となるものは存在しない。したがって，$a_1=$［2］である。

(2) a_2 を求めるには，$x+2y \leqq 2$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を求めればよい。このうち，$y=0$ となるものは，［3］個あり，$y=1$ となるものは［4］個ある。また，$y \geqq 2$ となるものは存在しない。したがって，$a_2=$［5］である。

(3) a_{2n} を求めるには，$x+2y \leqq 2n$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を求めればよい。このうち，$y=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ となるものの個数は，

$2n-$［6］$k+$［7］個である。このことより，$a_{2n}=n^2+$［8］$n+$［9］である。

(4) $a_{2n+1}-a_{2n} \geqq 200$ となる最小の n は［10］［11］［12］である。

(5) $a_{2n}+a_{2n-1}=$［13］n^2+［14］$n+$［15］である。

(6) $S_{2n}=\dfrac{[16]}{[17]}n^3+\dfrac{[18]}{[19]}n^2+\dfrac{[20][21]}{[22]}n$ である。

〔 1 ～ 22 の選択肢 〕

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9	⑩ 0

第４問　次の文章中の［1］～［22］に適する数字を，下の選択肢①～⑩のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，重複して使用してもよい。　　**解答番号**［1］～［22］

$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$ である三角形 OAB があり，辺 OA を $1:2$ に内分する点を C，辺 OB を $2:1$ に内分する点を D とする。直線 AD と直線 CB の交点を P とする。三角形 OAB の重心を G とする。

(1)　三角形 OAB の面積は ［1］$\sqrt{\text{［2］［3］}}$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\text{［4］}}{\text{［5］}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\text{［6］}}{\text{［7］}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。直線 OP と辺 AB の交点を Q とすれば，

Q は線分 OP を ［8］：［9］ に外分する点である。

(3)　三角形 OGP の面積は，三角形 OAB の面積の $\dfrac{\text{［10］}}{\text{［11］}}$ 倍である。

(4)　$\mathrm{GP}=\dfrac{\text{［12］}}{\text{［13］}}$ である。

(5)　点 X が $\left|\overrightarrow{\mathrm{PX}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PG}}=6$ を満たすときを考える。このとき，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PX}}-\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|^2=\dfrac{\text{［14］［15］［16］}}{\text{［17］［18］}}$ であり，X の軌跡は，中心が G，半径が $\dfrac{\text{［19］}\sqrt{\text{［20］［21］}}}{\text{［22］}}$ の円であることがわかる。

〔 1 ～ 22 の選択肢 〕

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ 9	⑩ 0