数　　学

問題は第４問まであります

＜答えに関する注意事項＞

１．解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークせよ。

２．問題文中の，［ア］，［イウ］などには，特に指示がない限り，符号（−，±）または数字（0 ～ 9）が入る。ア，イ，ウ，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応する。

それらを解答用紙のア，イ，ウ，… で示された解答欄にマークして答えよ。

例　［アイウ］に −39 と答えたいとき

ア	●	⊕	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	⊖	⊕	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
ウ	⊖	⊕	0	1	2	3	4	5	6	7	8	●

なお，同一の問題文中に［ア］，［イウ］などが 2 度以上現れる場合，2 度目以降は［ア］，［イウ］のように細字で表記する。

３．分数は既約分数（それ以上約分できない分数）で答え，符号は分子につけるものとする（例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{3}{4}$ と答えたいときは，$\dfrac{-3}{4}$ として答えよ）。

４．根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えるものとする（例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけない）。

第 1 問　次の文章中のア～ノに適する符号または数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(A)

$a = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$b = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，

$$a^3 + b^3 = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

(B)

756 と 792 の最大公約数は，$\boxed{\text{オカ}}$ である。

また，4601 と 5029 の最大公約数は，$\boxed{\text{キクケ}}$ である。

(C)

x についての不等式

$$\log_2 2x - 2\log_{\frac{1}{4}}(9-2x) - 2^{\log_4 9} < 0$$

の解は，

$$\boxed{\text{コ}} < x < \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\quad \boxed{\text{ス}} < x < \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{ス}}$ とする。

(D)

$\left|\vec{a}\right| = 4$，$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 5$ とする。

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{タ}}$ である。

t が任意の実数値をとるとき，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ は，$t = \boxed{\text{チツ}}$ で最小値 $\sqrt{\boxed{\text{テト}}}$ をとる。

(E)

xy 平面上に双曲線 $C : 3x^2 - 2y^2 + 24 = 0$ がある。

C の焦点の座標は，$\left(0,\ \boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}\right)$，$\left(0,\ -\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}\right)$ である。

また，C 上の点 $\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{6}\right)$ における C の接線の方程式は，

$$y = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}x + \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

である。

第 2 問　次の文章中のア～ナに適する符号または数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

xy 平面上に，4 点 A(0，3)，B(1，0)，C(3，0)，D(3，1) と，放物線 $K : y = -2x^2 - 1$ がある。

(1) 点 P が K 上を動くとき，線分 AP の中点の軌跡は，放物線

$$y = \boxed{\text{アイ}}\, x^2 + \boxed{\text{ウ}}$$

である。

(2) xy 平面上の点 Q から K へ 2 本の接線を引き，それらの接点を R，S とし，線分 RS の中点を M とする。

K 上の点 $(t，-2t^2-1)$ における K の接線の方程式は，

$$y = \boxed{\text{エオ}}\, tx + \boxed{\text{カ}}\, t^2 - \boxed{\text{キ}}$$

である。

点 Q が直線 BC 上を動くとき，点 M の軌跡は，放物線

$$y = \boxed{\text{クケ}}\, x^2 - \boxed{\text{コ}}$$

である。

点 Q が直線 AB 上を動くとき，点 M の軌跡は，放物線

$$y = \boxed{\text{サシ}}\, x^2 + \boxed{\text{ス}}\, x - \boxed{\text{セ}}$$

である。

点 Q が直線 AD 上を動くとき，点 M の軌跡は，放物線

$$y = \boxed{\text{ソタ}}\, x^2 + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\, x - \boxed{\text{テ}}$$

である。

点 Q が四角形 ABCD の周を動くとき，点 M の軌跡によって囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$

である。

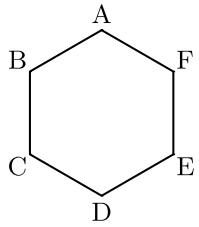
（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

第 3 問　次の文章中のア～ノに適する符号または数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，［ス］，［ネ］は適するものを次ページの選択肢から選べ。

図のような一辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF があり，点 P は次の規則にしたがって正六角形 ABCDEF の辺上を動く。

1 つのサイコロを投げて，2 以下の目が出れば点 P は時計回りに 2 だけ進み，3 以上の目が出れば点 P は反時計周りに 1 だけ進む。



初めに点 P は A にあるとする。

(1) 1 つのサイコロを 2 回投げた後，点 P が F にある確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2) 1 つのサイコロを 3 回投げた後，点 P が A にある確率は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}$ である。

また，1 つのサイコロを 3 回投げた後に点 P が A にあるとき，途中で D を通過していない条件付き確率は $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコ}}$ である。

(3) l，m，n は正の整数とする。

(i) 1 つのサイコロを $3l$ 回投げた後，点 P が D にあるが，点 P が途中で D を通過していない確率は $\left(\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\right)^{\boxed{ス}}$ である。

(ii) 1 つのサイコロを n 回投げた後，点 P が A にある確率を p_n とする。

$$p_{3(m+1)} = \frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチ}} p_{3m} + \frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{タチ}}$$

であるから，$n = 3m$ のとき，

$$p_n = \frac{1}{\boxed{ト}} \left\{ \left(\frac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}} \right)^{\boxed{ネ}} + \boxed{ノ} \right\}$$

である。

【 ス の選択肢】

① $l-1$	② l	③ $l+1$	④ $3l-3$
⑤ $3l-2$	⑥ $3l-1$	⑦ $3l$	⑧ $3l+1$

【 ネ の選択肢】

① $n-1$	② n	③ $n+1$	④ $3n-3$
⑤ $3n-2$	⑥ $3n-1$	⑦ $3n$	⑧ $3n+1$

第４問　次の文章中のア～ノに適する符号または数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

x の関数

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin 2t - x\cos 2t|\,dt$$

について考える。

(1) $f(0) = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2) (i) $x \leqq 0$ のとき，

$$f(x) = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\left(\boxed{オ} - x\right)$$

である。

(ii) $x \geqq 0$ のとき，$\sin 2t - x\cos 2t = 0$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ となる t を α とおくと，

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^{\boxed{カ}} + \boxed{キ}}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^{\boxed{カ}} + \boxed{キ}}}$$

と表せる。

よって，$x \geqq 0$ のとき，

$$f(x) = \sqrt{x^{\boxed{カ}} + \boxed{キ}} - \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\left(x + \boxed{コ}\right)$$

である。

(iii) x がすべての実数値をとるとき，$f(x)$ は，$x = \dfrac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ で最小値

$\dfrac{\sqrt{\boxed{ス}} - \boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ をとる。

(3) $\sqrt{x^{\boxed{カ}} + \boxed{\quad キ \quad}} = u - x$ と置換することにより，

$$\int_0^1 \sqrt{x^{\boxed{カ}} + \boxed{\quad キ \quad}}\,dx = \int_{\boxed{ツ}}^{\boxed{タ}+\sqrt{\boxed{チ}}} \frac{u^4 + \boxed{\quad テ \quad}u^2 + 1}{\boxed{\quad ト \quad}u^{\boxed{ナ}}}\,du$$

である。

よって，

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{\boxed{\quad ニ \quad}} \left\{ \log\left(\boxed{\quad ヌ \quad} + \sqrt{\boxed{\quad ネ \quad}} \right) + \sqrt{\boxed{\quad ノ \quad}} \right\}$$

と求められる。